

Uitwerkingen deeltentamen B, Calculus, 2Y138, dinsdag 16 november 2004.

De opgaven zijn op meerdere manieren op te lossen.

1. Laat $I := \int_0^2 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int_0^2 x \frac{1}{(1+x)^2} dx$.

Partiëel integreren gaat met de keuze $f(x) = x$ en $g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ en $g(x) = -\frac{1}{1+x}$.

Dan $I = \left[-x \frac{1}{1+x} \right]_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{1+x} dx = -\frac{2}{3} + [\ln(1+x)]_0^2 = -\frac{2}{3} + \ln(3)$.

2. Het is een separabele eerste-orde DV. Er is een constante oplossing en wel $y(x) = 1$.

(Dit wordt niet gevraagd.) Herschrijven geeft $\frac{y'}{(y-1)^2} = 2x$ en integreren aan beide

kanten levert $-\frac{1}{y-1} = x^2 + c, c \in \mathbb{R}$. Dus $y-1 = -\frac{1}{x^2+c}$ en uiteindelijk vinden we

$y(x) = 1 - \frac{1}{x^2+c}, c \in \mathbb{R}$.

Laat $y(0) = 0$. Invullen van $x = 0$ geeft $0 = 1 - \frac{1}{c}$ en dus $c = 1$. De gevraagde

oplossing is $y(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$.

Laat $y(1) = 0$. Invullen van $x = 1$ geeft $0 = 1 - \frac{1}{1+c}$ en dus $c = 0$. De gevraagde

oplossing is $y(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

De eerste oplossing heeft een horizontale asymptoot $y = 1$ en de tweede oplossing heeft twee asymptoten en wel een verticale $x = 0$ en een horizontale $y = 1$. In het laatste geval is $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1$.

3. (a) De DV is een lineaire eerste-orde-DV van de vorm $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$. Vermenigvuldigen van de DV met e^{x^2} geeft $e^{x^2}y' + e^{x^2}2xy = x$ ofwel $\frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = x$.

Integreren levert $e^{x^2}y = \frac{1}{2}x^2 + c, c \in \mathbb{R}$ en delen door de e-macht geeft uiteindelijk

$y(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + c e^{-x^2}, c \in \mathbb{R}$.

(b) Laat $y(0) = 1$. Invullen van $x = 0$ in bovenstaande vergelijking geeft $1 = c$ en de gevraagde oplossing is $y(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2}$.

3'. (a) De uitdrukking cy' beschrijft de kracht uitgeoefend door de demper en de uitdrukking ky beschrijft de kracht uitgeoefend door de veer. De kracht uitgeoefend door de demper is (tegengesteld) evenredig aan de snelheid en de kracht uitgeoefend door de veer is (tegengesteld) evenredig aan de uitwijking.

(b) Uit de gegeven oplossing volgt dat de evenwichtsstand gelijk is aan -0.15 . Uit de DV volgt dat deze gelijk is aan $-Mg/k$, dus $k = -0.3 * 10 / (-0.15)$ ofwel $k = 20$.

4. (a) Laat $z = 2 - 2i\sqrt{3}$.
 Dan $z = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \right) = 4 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 4 e^{-i\pi/3} = e^{\ln(4) - i\pi/3}$.
- (b) Voor een negatief reëel getal geldt dat het argument gelijk is aan $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 Op grond van de eigenschappen van de e-macht geldt dat $z^n = e^{n \ln(4) - i n (\pi/3)}$.
 Aangezien $\arg(z^n) = n \arg(z) = n(\pi/3)$ zou dan moeten gelden $n(\pi/3) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ofwel $n = 3 + 6k$, $k \in \mathbb{Z}$.
 Antwoorden van de vorm $n = 3, 9, 15, \dots$ zijn prima.
5. Laat $|z| = r$ en $\arg(z) = \varphi$.
 Dan $|z^6| = r^6 = |-64| = 64$ en $\arg(z^6) = 6\varphi = \arg(-64) + 2k\pi = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 Gevolg $r = \sqrt[6]{64} = 2$ en $\varphi = \pi/6 + k\pi/3$, $k \in \mathbb{Z}$. Er zijn 6 oplossingen met absolute waarde 2 en argument $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6, -\pi/6, -\pi/2$ en $-5\pi/6$.
 De oplossingen liggen regelmatig op een cirkel met straal 2, d.w.z. twee verbindingslijnen naast elkaar tussen enerzijds de oorsprong en anderzijds oplossingen maken een hoek van $\pi/3$ en een oplossing heeft argument $\pi/6$.
6. (a) Het tweede orde Taylorpolynoom is gelijk aan $g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2$.
 Dus $g(0) = 8 = f^3(0)$ ofwel $f(0) = 2$.
 (b) De kettingregel geeft dat $g'(0) = 3f^2(0)f'(0)$ ofwel $-4 = 12g'(0)$ dus $g'(0) = -1/3$.
7. De integrand $\frac{t^2 - t - 2}{\sqrt{\sin^2(t) + 1}} = \frac{(t-2)(t+1)}{\sqrt{\sin^2(t) + 1}}$ heeft negatieve waarden als $-1 \leq t \leq 2$.
 De grafiek van de integrand ligt voor t in $[0, 2]$ onder de x -as en vanaf $x = 2$ boven de x -as. De integraal over het interval $[0, x]$ levert een negatieve waarde op en deze waarde wordt negatiever zolang x naar rechts schuift, temminste als $x \leq 2$. Vanaf $x = 2$ zal de waarde van de integraal gaan stijgen, omdat dan het deel van de integraal over het interval $[2, x]$ een positieve bijdrage levert. De integraal is zo klein mogelijk als $x = 2$.